ESTUDIOS MATEMÁTICOS
NIVEL MEDIO
PRUEBA 1

Número del alumno

Lunes 5 de mayo de 2003 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de alumno en la casilla de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en el cuadro correspondiente de la portada del examen (p. ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, puede utilizar para sus cálculos el espacio que queda debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta.

1. Sea $x = 6{,}4 \times 10^7$ y $y = 1{,}6 \times 10^8$.

Halle

(a) $\dfrac{x}{y}$

(b) $y - 2x$,

expresando sus respuestas de la forma $a \times 10^k$ donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

2. La fórmula de conversión de la temperatura de la escala Fahrenheit (F) a la Celsius (C) está dada por $C = \frac{5(F-32)}{9}$.

(a) ¿Cuál es la temperatura en grados Celsius cuando hace una temperatura de 50° Fahrenheit?

Existe otra escala de temperatura llamada la escala Kelvin (K).
La temperatura en grados Kelvin está dada por $K = C + 273$.

(b) ¿Cuál es la temperatura en grados **Fahrenheit** cuando en la escala Kelvin es de cero grados?

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________________

(b) ______________________________

3. Zog, del planeta Marte, desea cambiar unos dólares marcianos (MD) a dólares de los EE.UU. (USD). La tasa de cambio es $1\ \text{MD} = 0{,}412\ \text{USD}$. El banco cobra $2\,\%$ de comisión.

(a) ¿Cuántos dólares de los EE.UU. recibirá Zog si paga 3500 MD?

Zog se encuentra con Zania, de Venus, cuya moneda es la rupia venusina (VR). Quieren cambiar dinero y evitar los aranceles bancarios. La tasa de cambio es $1\ \text{MD} = 1{,}63\ \text{VR}$.

(b) ¿Cuántos dólares marcianos, redondeados al dólar más próximo, recibirá Zania si le da a Zog 2100 VR?

Operaciones:

Respuestas:

(a) ____________________

(b) ____________________

4. Un atlas brinda la siguiente información acerca de la población aproximada de algunas ciudades en el año 2000. Se ha omitido, accidentalmente, la población de Nairobi.

Ciudad	Población en millones
Melbourne	3,2
Bangkok	7,2
Nairobi	
París	9,6
San Pablo	17,7
Tokio	28,0
Seattle	2,1

El atlas nos dice que la población media de este grupo de ciudades es de 10,01 millones.

(a) Calcule la población de Nairobi.

(b) ¿Qué ciudad tiene un número de habitantes igual al valor de la mediana?

Operaciones:

Respuestas:

(a) ________________

(b) ________________

5. (a) La siguiente tabla de verdad contiene dos entradas incorrectas, una en la tercera columna y la otra en la cuarta columna. Marque con un círculo las dos entradas incorrectas.

(b) Complete los dos valores que faltan en la columna cinco.

(c) ¿Cuál de las siguientes palabras podría ser utilizada para describir la proposición representada por los valores de la última columna (numéro 6)? Indique sólo **una**.

(i) contraria

(ii) tautología

(iii) recíproca

(iv) contradicción

(v) contrarrecíproca

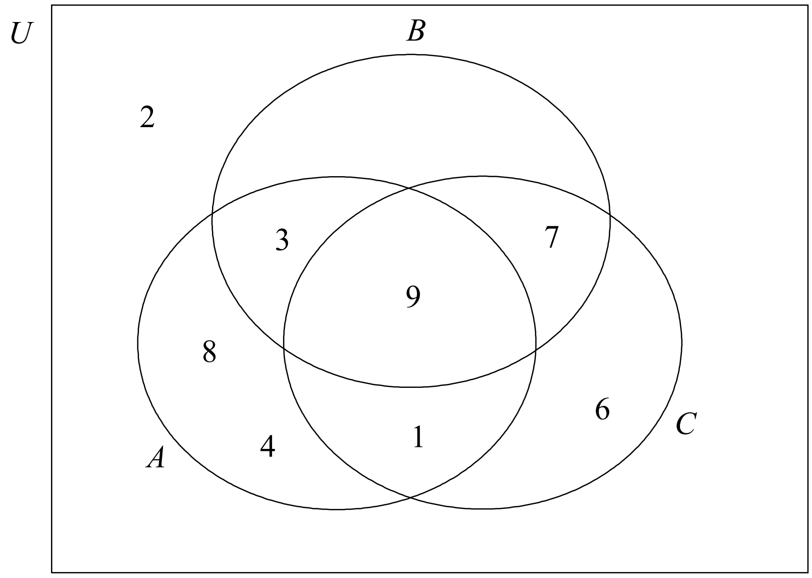
1	2	3	4	5	6
p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	F		F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F		F

Operaciones:

Respuesta:

(c) ____________________

6. En el diagrama de Venn a continuación, A, B y C son subconjuntos de un conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.



Enumere los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B \cap C$

(c) $(A' \cap C) \cup B$

Operaciones:

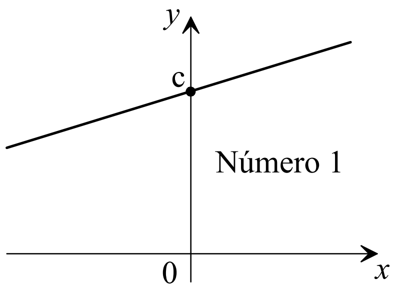
Respuestas:

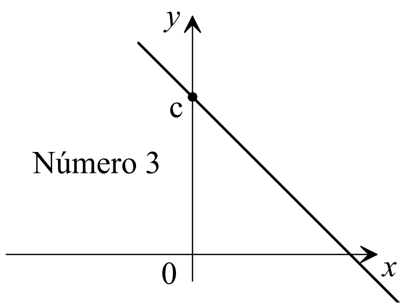
(a) ______________________________

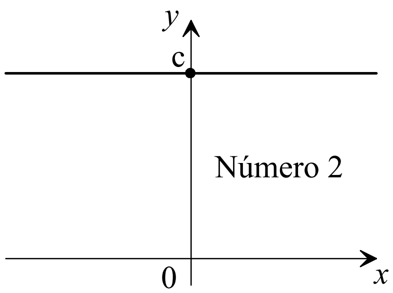
(b) ______________________________

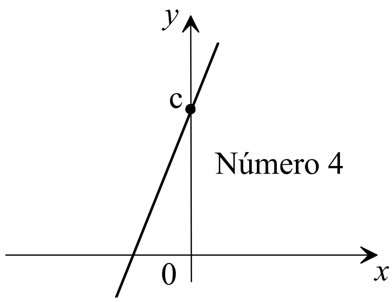
(c) ______________________________

7. Los cuatro diagramas a continuación muestran las gráficas de cuatro rectas distintas, todas trazadas a la misma escala. Cada diagrama tiene un número y c es una constante positiva.





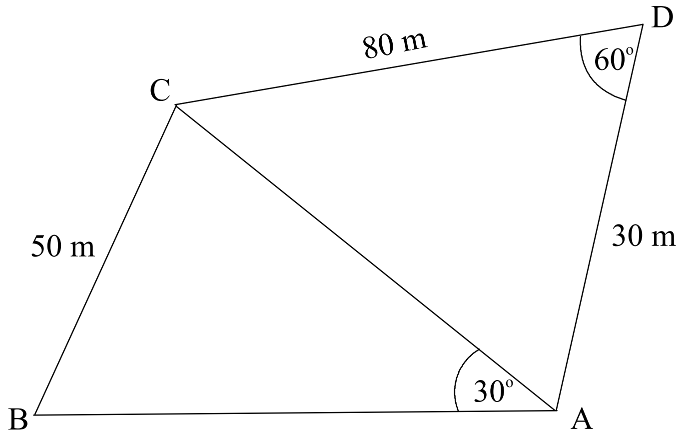




Escriba, en la tabla que sigue, el número del diagrama cuya recta corresponde a la ecuación de la tabla.

Ecuación	Número de diagrama
$y = \mathrm{c}$	
$y = -x + \mathrm{c}$	
$y = 3x + \mathrm{c}$	
$y = \frac{1}{3}x + \mathrm{c}$	

8. En la figura aparecen dos campos triangulares adyacentes ABC y ACD, en los cuales $AD = 30\text{ m}$, $CD = 80\text{ m}$, $BC = 50\text{ m}$. $A\hat{D}C = 60^\circ$ y $B\hat{A}C = 30^\circ$.



Nota:
Figura no
dibujada a
escala.

(a) Usando el triángulo ACD, calcule la longitud AC.

(b) Calcule la magnitud de $A\hat{B}C$.

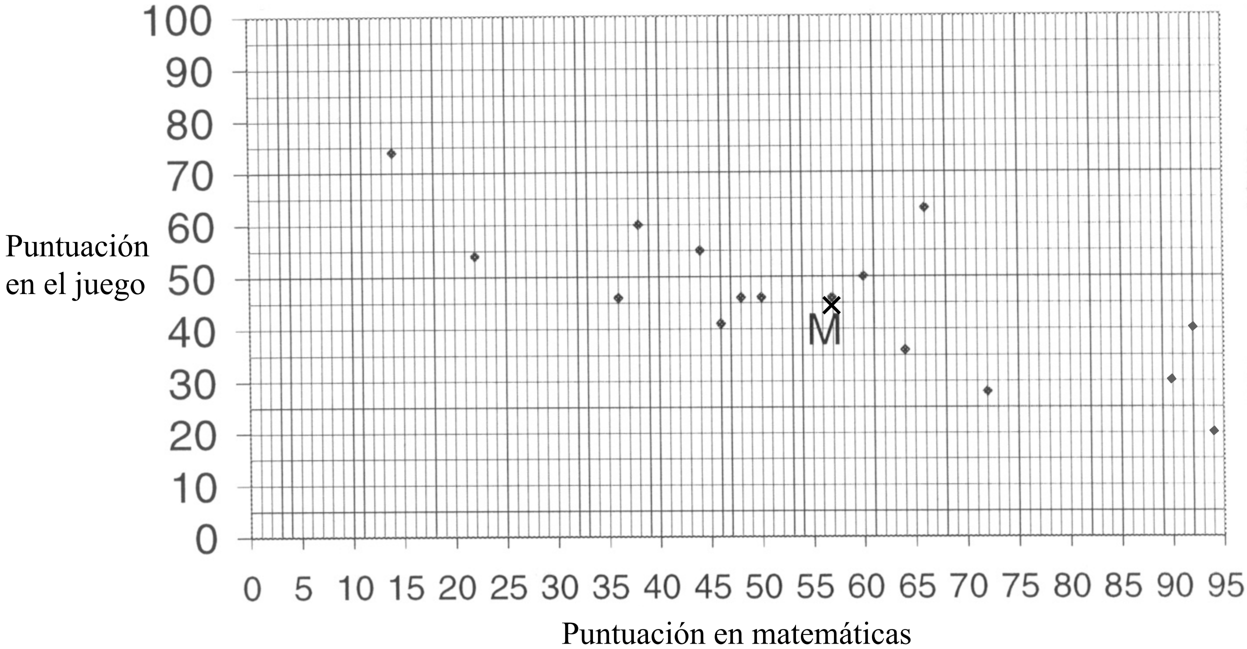
Operaciones:

Respuestas:

(a) ____________________

(b) ____________________

9. Un grupo de 15 estudiantes realizó un examen de matemáticas. Luego, los estudiantes jugaron a un juego de computador. En el diagrama que sigue se muestran las puntuaciones obtenidas en el examen y en el juego.



La puntuación media obtenida en el examen de matemáticas fue de 56,9 y la puntuación media obtenida en el juego de computador fue de 45,9. El punto M tiene coordenadas (56,9 , 45,9).

(a) Describa la relación entre ambos conjuntos de puntuaciones.

Una recta de ajuste óptimo pasa por el punto (0, 69).

(b) Trace esta recta de ajuste óptimo en el diagrama.

Jane llegó tarde al examen y obtuvo 45 en matemáticas.

(c) Por medio de la gráfica o de otra manera, estime la puntuación que espera obtener Jane en el juego de computador; exprese su respuesta redondeada al entero más próximo.

Operaciones:

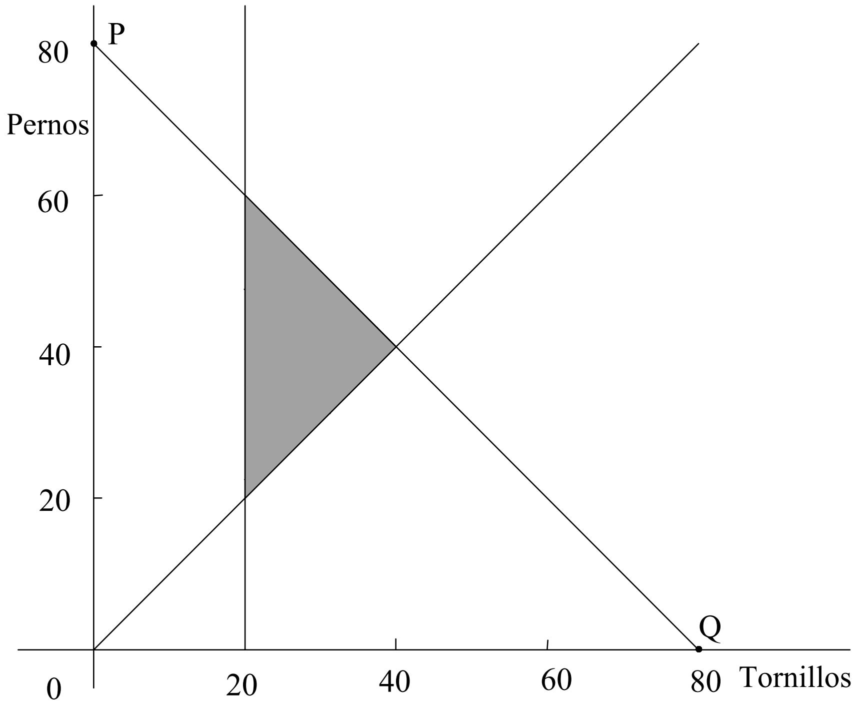
Respuestas:

(a) ______________________

(c) ______________________

10. Una máquina puede fabricar cajas de tornillos o cajas de pernos. Puede funcionar durante un máximo de 80 horas semanales. Lleva una hora fabricar cada caja. La máquina debe fabricar no menos de 20 cajas de tornillos por semana. El número de cajas de pernos, y, no debe ser menor que el número de cajas de tornillos, x.

Esta información aparece en el diagrama a continuación.



(a) Escriba la ecuación de la recta PQ.

La ganancia de una caja de tornillos es de \$ 40 y la de una caja de pernos es de \$ 60.

(b) ¿Cuántas cajas de tornillos y cuántas cajas de pernos se deben fabricar para obtener la máxima ganancia?

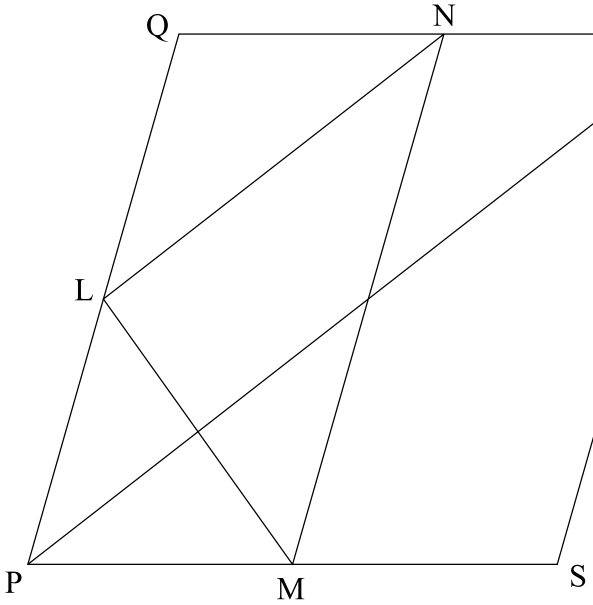
Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

11. En el diagrama que sigue, L, M y N son los puntos medios de los lados PQ, PS y QR respectivamente.



La suma de los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{QR}$ y $\vec{RP}$ es cero, es decir $\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP} = 0$.

(a) Escriba una suma de **cuatro** vectores que sea cero.

(b) Halle una expresión del vector $\vec{LN}$ en función de $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________________

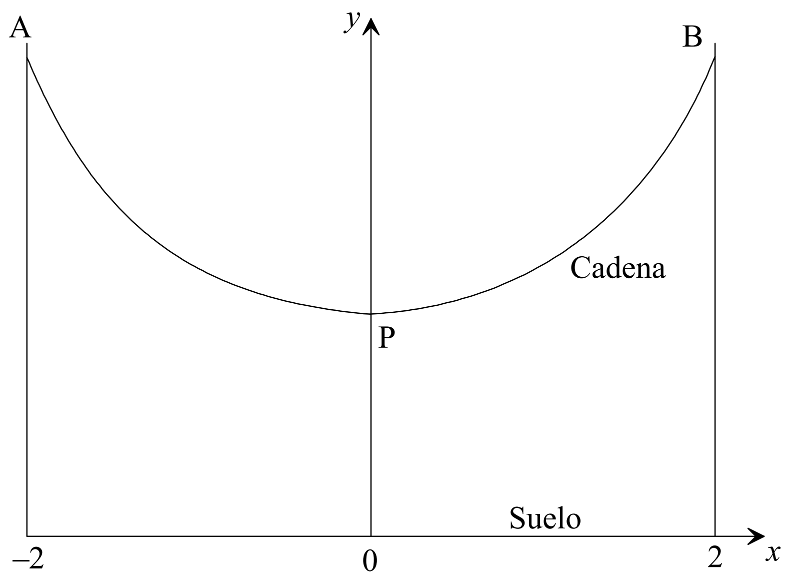
(b) ______________________________

12. En el diagrama aparece una cadena colgada entre dos ganchos, A y B.

Los puntos A y B están a alturas iguales por encima del suelo. P es el punto más bajo de la cadena.

El suelo se representa por el eje de las x. La abscisa x de A es -2 , y la abscisa x de B es 2. El punto P pertenece al eje de las y.

La forma de la cadena está dada por $y = 2^x + 2^{-x}$ donde $-2 \le x \le 2$.



(a) Calcule la altura del punto P.

(b) Halle el recorrido de y. Exprese su respuesta como un intervalo o usando símbolos de inecuación.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

13. Mario ha gastado $\$ 40000$ en comprar unas tierras. Las tierras aumentan de valor en un 5% todos los años.

(i) ¿Cuánto valen las tierras una vez pasados cinco años?

Pasados cinco años, Mario vende las tierras. Paga un impuesto del 1% sobre la venta y gasta el resto del dinero en un automóvil. El automóvil baja de valor a una tasa de $\$ 2500$ por año.

(ii) ¿Cuánto paga Mario por impuestos?

(iii) ¿Cuánto vale el automóvil cinco años después de haberlo comprado Mario?

Operaciones:

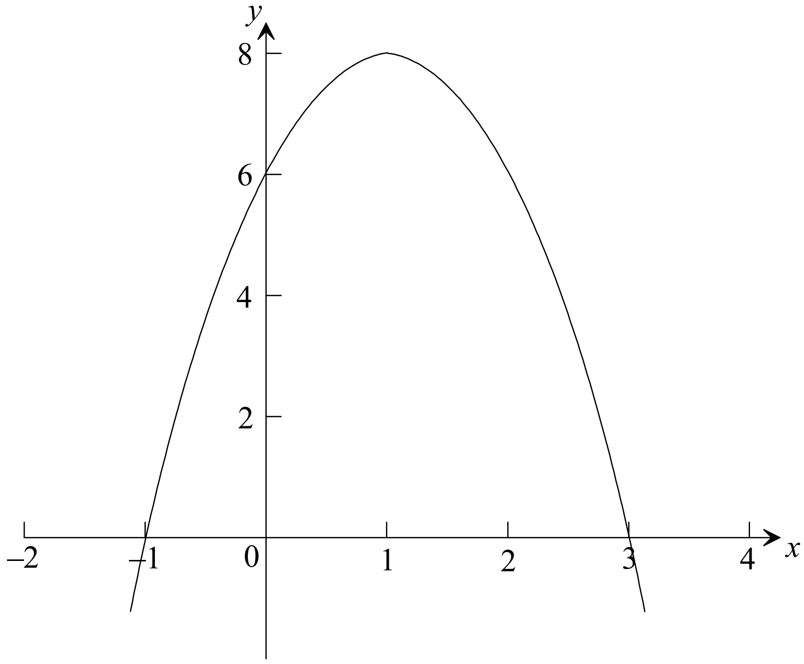
Respuestas:

(i) ____________________

(ii) ____________________

(iii) ____________________

14. La figura a continuación muestra parte de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + 4x + c$.



(a) Escriba el valor de *c*.

(b) Halle el valor de *a*.

(c) Escriba la función cuadrática descompuesta en factores.

Operaciones:

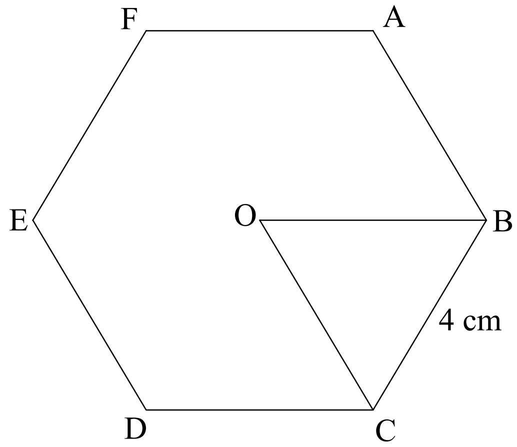
Respuestas:

(a) ______________________

(b) ______________________

(c) ______________________

15. La figura a continuación muestra un hexágono, cuyos lados tienen todos longitud 4 cm y de centro en O. Los ángulos interiores del hexágono son todos iguales.



Los ángulos interiores de un polígono de n lados iguales y n ángulos iguales (polígono regular) suman $(n-2)\times 180^\circ$.

(a) Calcule la magnitud del ángulo $\mathrm{A\hat{B}C}$.

(b) Dado que $\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$, halle el área del tríangulo OBC.

(c) Halle el área de todo el hexágono.

Operaciones:

Respuestas:

(a) ______________________________

(b) ______________________________

(c) ______________________________